DE STELLING VAN MARCINKIEWICZ

door

J.H.H. Perk

Amsterdam, april 1971.

De stelling van Marcinkiewicz

§ 1. Inleiding

Deze notes gaan over een stelling uit de waarschijnlijkheidstheorie, die weinig bekendheid geniet in kringen van natuurkundigen, maar misschien toch interessante consequenties kan hebben.

De stelling is bewezen in 1939 door J. Marcinkiewicz[1)] tezamen met enkele andere interessante resultaten, echter met behulp van een niet voor iedereen direct toegankelijke hoeveelheid functietheoretische hulpstellingen. Verder zijn er ook enkele bewijzen, die geheel ingekleed zijn in de maattheoretische notatie en andere apparatuur die tegenwoordig gebruikt worden in de boeken over waarschijnlijkheidstheorie[2)].

Al deze bewijzen slaan op één-dimensionale waarschijnlijkheidsverdelingen, waarvoor aangetoond wordt, dat een afbrekende cumulantontwikkeling alleen leidt tot zinvolle waarschijnlijkheidsverdelingen als alle cumulanten van hoger orde dan de tweede nul zijn. Dit zou in verband kunnen staan met de moeilijkheden die vaak optreden wanneer men, in de statistische mechanica van veeldeeltjessystemen, tracht diagramontwikkelingen na een bepaalde term af te breken.

In het komende betoog zullen we eerst de noodzakelijke definities geven in § 2, en daarna de stelling formuleren en afleiden voor het ééndimensionale geval in § 3. Daarna volgt uitbreiding van de stelling tot meer-dimensionale verdelingen in § 4, en tot waarschijnlijkheidsfunctionalen in § 5. In de appendix worden enkele algemene opmerkingen gemaakt en een alternatieve definitie gegeven.

---

1) Sur une propriété de la loi de Gausz par J. Marcinkiewicz (Wilno), Mathematisches Zeitschrift 44, 612-618(1939).

2) Zie b.v.: H.Richter, Wahrscheinlichkeitstheorie, p.300-301, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1959.

§ 2. Definities en noodzakelijke eigenschappen

Voorlopig beschouwen we alleen één-dimensionale waarschijnlijkheidsverdelingen, d.w.z. we kijken naar toevalsobjecten die gekarakteriseerd worden door één reële variabele x. Door het geven van een waarschijnlijkheidsdichtheid voor deze x, leggen we de verdeling vast: $W(x)dx$ is de fractie van het totaal aan objecten met parameter tussen x en $x+dx$[3]. We eisen vòor de waarschijnlijkheidsdichtheid:

$$\begin{cases} W(x) \geq 0 & (1) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} W(x)\,dx = 1 & (2) \end{cases}$$

Hieruit kan ook een discrete verdeling verkregen worden, b.v. door te kiezen:

$$W(x) = \sum_n W_n\,\delta(x-n) \qquad (3)$$

We definiëren nu verwachtingswaarden van een willekeurige functie f door:

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,W(x)\,dx \qquad (4)$$

aannemende dat deze integraal bestaat. Speciaal definiëren we de momenten als:

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n\,W(x)\,dx \quad , n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (5)$$

en de karakteristieke functie als de Fourier-getransformeerde van de waarschijnlijkheidsdichtheid, d.w.z. als:

$$C(u) = \langle e^{iux} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux}\,W(x)\,dx \qquad (6)$$

met u willekeurig reëel.

Deze functie voldoet aan de volgende eigenschappen:

---

[3] Wiskundigen gebruiken meestal een iets andere taal, zie b.v.: H.Cramér, Mathematical methods of statistics, Princeton Un.Press. W.Feller, Introduction to the theory of probability and its applications, Wiley.

1) Uit $|e^{iux}| = 1$, $W(x) \geqslant 0$ en $\int W(x)dx = 1$ volgt dat $C(u)$ bestaat en begrensd is, i.e.

$$|C(u)| \leqslant 1 \tag{7a}$$

2) Daar e^{iux} continu is in u geldt ook:

$$C(u) \qquad \text{continu} \tag{7b}$$

3) Uit de normeringseis voor $W(x)$ volgt:

$$C(0) = 1 \tag{7c}$$

4) Door invullen ziet men in dat:

$$C^*(u) = C(-u) \tag{7d}$$

Het gedrag van $W(x)$ voor grote waarden van x wordt bepaald door de hogere momenten, waarvan het bestaan samenhangt met de differentiëerbaarheidseigenschappen van $C(u)$ in de oorsprong, i.e.:

$$\left(\frac{d^n C(u)}{du^n}\right)_{u=0} = i^n \langle x^n \rangle \tag{8}$$

Eenvoudig valt in te zien dat als een bepaald moment bestaat ook alle momenten van lager orde bestaan. Dat wil echter niet zeggen dat alle momenten moeten bestaan, want neemt men bijvoorbeeld:

$$W(x) = \frac{1}{\pi} \; \frac{1}{1+x^2} \tag{9a}$$

dan bestaat alleen het nulde moment (normering);

$$C(u) = e^{-|u|} \tag{9b}$$

is dan ook niet differentiëerbaar in $u=0$. Een belangrijk voorbeeld waarbij alle momenten bestaan is de Gauszische verdeling:

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{10a}$$

met $\sigma > 0$ en μ reëel. Nu is

$$C(u) = e^{i\mu u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2} \tag{10b}$$

zelfs analytisch. Omgekeerd worden de differentiëerbaarheids-eigenschappen van de functie W(x) bepaald door het gedrag van C(u) voor grote u.

§ 3. De eendimensionale stelling van Marcinkiewicz

Deze stelling beweert, dat als van een verdeling de karakteristieke functie de vorm exp $P_n(u)$ heeft, waarbij $P_n(u)$ een polynoom van de n-de graad is dat dan de graad van $P_n(u)$ niet hoger dan twee kan zijn. Met name geldt dat:

$$C(u) = e^{a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n} \tag{11}$$

dàn en slechts dàn een karakteristieke functie is, als $a_0=0$, a_1 zuiver imaginair, a_2 reëel negatief en $a_k=0$ voor $k > 2$ is, m.a.w.:

$$C(u) = e^{i\mu u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2} \tag{12}$$

is de karakteristieke functie van een Gauszverdeling.

Wij kunnen het ook nog anders zeggen als wij de cumulanten κ_k van de verdeling definiëren als de ontwikkelings-coëfficiënten van:

$$\log C(u) = \sum_k \kappa_k \frac{(iu)^k}{k!} \tag{13}$$

voorzover deze ontwikkeling bestaat. Dan zegt de stelling: òf alle cumulanten van hoger orde dan twee zijn nul, òf er zijn cumulanten van willekeurig hoge orde.

Bewijs van de stelling:

Ga uit van: $C(u) = e^{P_n(u)}$ (14)

met: $P_n(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k$ (15)

Dat C(u) een karakteristieke functie is, houdt in dat er een W(x) bestaat met $W(x) \geqslant 0$ en $\int W(x)dx = 1$, zodanig dat voor reële u:

$$C(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} W(x)\, dx$$

Vanwege de specifieke vorm is C(u) echter voort te zetten tot een analytische functie op het gehele complexe z-vlak:

$$C(z) = e^{P_n(z)} \tag{14'}$$

Men kan dus ontwikkelen:

$$C(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{d^k C(z)}{dz^k}\right)_{z=0} \frac{z^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{d^k C(u)}{du^k}\right)_{u=0} \frac{z^k}{k!}$$

$$\overset{(8)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \langle x^k \rangle \frac{i^k z^k}{k!}$$

$$\overset{(5)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(izx)^k}{k!} W(x)\, dx$$

Hierop kan men verwisseling van sommatie en integratie toepassen vanwege de stelling van gemajoreerde convergentie. Dus geldt op het gehele complexe vlak:

$$C(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx} W(x)\, dx \tag{16}$$

Omdat W(x) positief reëel is, zien we dat C(z) positief reëel is langs de imaginaire as, en voor gegeven waarde van het imaginaire deel van z zijn maximum altijd op de imaginaire as aanneemt. Want noem $z = u + iv$, dan geldt:

$$|C(z)| = \left|\int e^{i(u+iv)x} W(x)\,dx\right| \leq \int \left|e^{i(u+iv)x}\right| W(x)\,dx$$

$$\leq \int e^{-vx} W(x)\,dx = C(iv) \qquad (17)$$

Dit betekent dat voor het polynoom $P_n(z)$ in het gehele complexe vlak zou moeten gelden:

$$\mathrm{Re}\, P_n(z) \leq P_n(iv) = P_n(i\,\mathrm{Im}\, z) \qquad (18)$$

De gang van het bewijs verder is dat we aantonen dat deze ongelijkheid tot een tegenspraak leidt, behalve in het geval dat n=1 of 2. We denken ons hiertoe (zie fig. 1) in het z-vlak een cirkel om de oorsprong gegeven met straal R zo groot, dat het polynoom $P_n(z)$ voor $|z| \gtrsim R$ mag worden benaderd door zijn dominante term $a_n z^n$, immers:

$$P_n(z) = a_n z^n \left(1 + O(z^{-1})\right) \qquad (19)$$

Het polynoom $P_n(z)$ bepaalt een afbeelding van het complexe z-vlak op het complexe P-vlak. In het bijzonder wordt een cirkel om de oorsprong van voldoend grote straal R in het z-vlak afgebeeld op een cirkel in het P-vlak, die n maal wordt doorlopen bij één omloop in het z-vlak. Een punt binnen de cirkel in het z-vlak wordt ook binnen de cirkel in het P-vlak afgebeeld.

Laat het snijpunt van de cirkel in het z-vlak, met de positieve imaginaire as $z_0 = iR$ zijn. Dan onderscheiden wij twee gevallen:

$$\text{I)} \quad P_n(z_o) > 0 \tag{20a}$$

$$\text{II)} \quad P_n(z_o) < 0 \tag{20b}$$

Wij zoeken nu in beide gevallen een punt z_1 op de genoemde cirkel in het z-vlak en buiten de imaginaire as, zodanig dat het beeldpunt in het P-vlak op de positieve reële as komt te liggen. Er zijn minstens n-2 zulke punten. Voor ieder van deze punten tonen wij aan dat de ongelijkheid (18) in tegenspraak is met het feit, dat het binnengebied van de cirkel in het z-vlak wordt afgebeeld pp het binnengebied van de cirkel in het P-vlak. Hieruit volgt dan $n \leq 2$.

ad I)

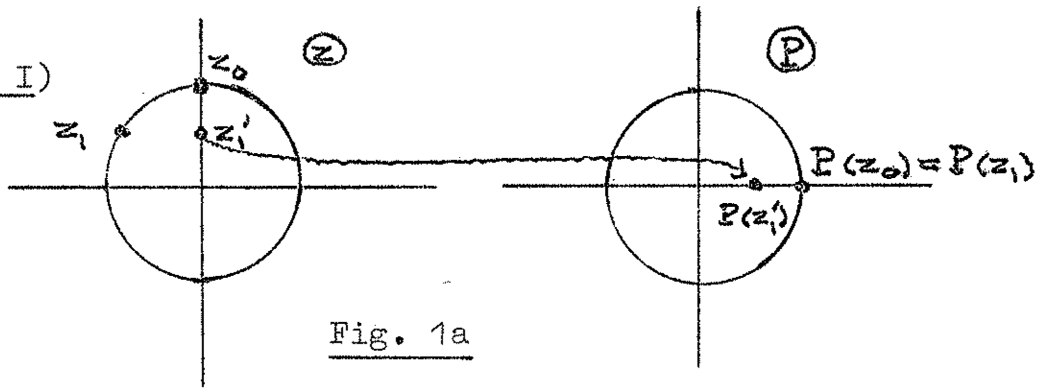

Fig. 1a

Kies:

$$z_1 = z_o \cdot e^{\frac{2\pi i}{n}} \tag{21a}$$

dan is

$$P_n(z_1) = P_n(z_o) = a_n (iR)^n \quad \text{positief reëel.} \tag{22a}$$

Dus het beeldpunt van z_1 valt samen met dat van z_0 in het P-vlak. Voor de projectie van z_1 op de imaginaire as, n.l. het punt:

$$z_1' = i \operatorname{Im} z_1 = z_o \cos \frac{2\pi}{n} \tag{23a}$$

geldt enerzijds:

$$P_n(z_1') = P_n(z_o) \cdot \cos^n \frac{2\pi}{n} \leq P_n(z_o) \tag{24a}$$

Anderzijds volgt uit het eerder afgeleide hulpresultaat (18):

$$P_n(z_1') \geqslant P_n(z_1) = P_n(z_0) \tag{25a}$$

Hier staat een tegenstrijdigheid tenzij:

$$\cos^n \frac{2\pi}{n} = 1 \tag{26a}$$

dus n=1, of n=2 .

ad II)

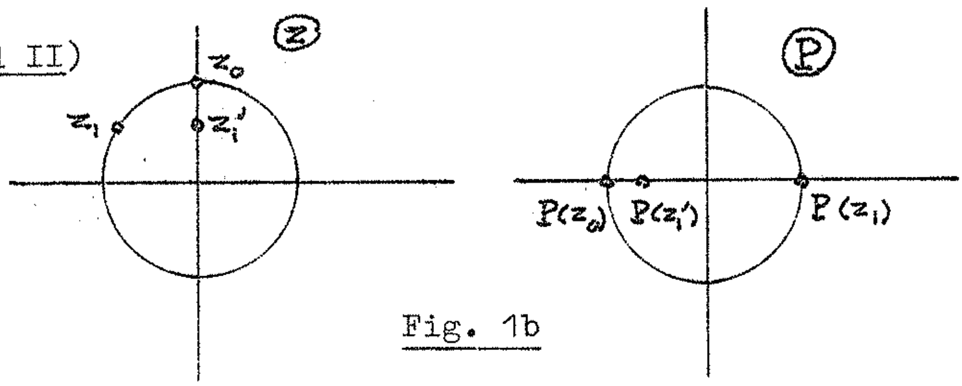

Fig. 1b

Kies nu:

$$z_1 = z_0 \, e^{\frac{\pi i}{n}} \tag{21b}$$

dan is

$$P_n(z_1) = -P_n(z_0) \qquad \text{positief reëel.} \tag{22b}$$

Dus het beeldpunt van z_1 ligt weer op de positief reële as, terwijl $P_n(z_0)$ nu op de negatief reële as valt.

Voor de projectie van z_1 op de imaginaire as, n.l. het punt:

$$z_1' = i \,\mathrm{Im}\, z_1 = z_0 \cos \frac{\pi}{n} \tag{23b}$$

geldt nu enerzijds:

$$P_n(z_1') = P_n(z_0) \cdot \cos^n \frac{\pi}{n} \leqslant P_n(z_1) = -P_n(z_0) \tag{24b}$$

met een echt kleiner teken als z_1 niet op de imaginaire as ligt (omdat het verschil tussen de beide leden van (24) van de grootte orde R^n is, terwijl in (19) correcties van de orde R^{n-1} zijn weggelaten). Anderzijds volgt weer uit het hulpresultaat (18):

$$P_n(z_1') \geqslant P_n(z_1) = -P_n(z_0) \tag{25b}$$

Dit levert een tegenstrijdigheid, tenzij:

$$\cos^n \frac{\pi}{n} = -1 \tag{26b}$$

dus n=1 .

Conclusie:

$$C(u) = e^{a_0 + a_1 u + a_2 u^2} \tag{27}$$

We gebruiken nu de eigenschappen van karakteristieke functies die we afgeleid hebben in § 2:

Uit C(0) = 1 volgt:

$$a_0 = 0 \tag{28a}$$

Uit C*(u) = C(-u) volgt:

$a_1^* u + a_2^* u^2 = -a_1 u + a_2 u^2$, dus:

$$\mathrm{Re}\, a_1 = \mathrm{Im}\, a_2 = 0 \tag{28b}$$

Uit $|C(u)| \leqslant 1$ volgt tenslotte:

$$a_2 \leqslant 0 \tag{28c}$$

Dus:

$$C(u) = e^{i\mu u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2} \quad \text{met } \mu \text{ en } \sigma \text{ reëel.} \tag{12}$$

q.e.d.

Tot slot kan er nog opgemerkt worden, dat Marcinkiewicz zijn stelling onder iets ruimere condities bewijst. Hij vindt: als C(u) een karakteristieke functie van de vorm $Q(u).\exp P_n(u)$, met $P_n(u)$ een polynoom van de graad n en Q(u) een analytische functie met een door n beperkt aantal nulpunten, dan is de verdeling Gauszisch. Wij zullen hier niet op ingaan.

§ 4. S-dimensionale uitbreiding van de stelling

De theorie voor één variabele kan zonder moeite gegeneraliseerd worden: We hebben nu objecten gekarakteriseerd door s reële parameters $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}$, waarvan we de verdeling nu geven door de waarschijnlijkheidsdichtheid W(x)

$$\text{met} \begin{cases} W(x_1, x_2, \dots, x_s) \geq 0 & (29) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_s \, W(x_1, x_2, \dots, x_s) = 1 & (30) \end{cases}$$

We kunnen weer verwachtingswaarden en in het bijzonder momenten invoeren:

$$\langle f(x_1, x_2, \dots, x_s) \rangle = \int f(x_1, x_2, \dots, x_s) W(x_1, x_2, \dots, x_s) \, d^s x \qquad (31)$$

$$\langle x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_s^{m_s} \rangle = \int x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_s^{m_s} W(x_1, x_2, \dots, x_s) \, d^s x \qquad (32)$$

en de karakteristieke functie:

$$C(u) = C(u_1, u_2, \dots, u_s) = \langle e^{i u \cdot x} \rangle$$

$$= \int e^{i(u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_s x_s)} W(x) \, d^s x \qquad (33)$$

met $u = (u_1 u_2 \dots u_s)$ reëel.

De eigenschappen voor een karakteristieke functie, bewezen in § 2, kunnen hier direct overgenomen worden. De stelling van Marcinkiewicz kan als volgt worden gegeneraliseerd:

Stel C(u) is een karakteristieke functie van de vorm

$$C(u) = e^{P_n(u)} \tag{34}$$

met $P_n(u)$ een polynoom in $u_1, u_2, \ldots, u_s$ met termen tot en met de graad n, dan is $n \leq 2$.

Dit gaan we nu bewijzen:
Allereerst merken wij op, dat de karakteristieke functie $C(u_1, \ldots, u_s)$ van de verdelingsfunctie $W(x_1, \ldots, x_s)$ door de substitutie $u_j \rightarrow u_j$, $u_k \rightarrow 0$ voor $k \neq j$ overgaat in de karakteristieke functie

$$C(0,0,\ldots,u_j,\ldots,0) = \int dx_1 \ldots \int dx_s\, W(x_1,\ldots,x_s)\, e^{iu_jx_j}$$

$$= \int dx_j\, W^{(1)}(x_j)\, e^{iu_jx_j} = C^{(1)}(u_j) \tag{35}$$

van de ééndimensionale verdelingsfunctie $W^{(1)}(x_j)$. Dus tengevolge van de ééndimensionale stelling van Marcinkiewicz kan het polynoom $P_n(0,0,\ldots,u_j,\ldots,0)$ hoogstens van de tweede graad zijn.

Vervolgens bewijzen wij de hulpeigenschap: als $C(u) = C(u_1, u_2, \ldots, u_s)$ de karakteristieke functie van een verdeling $W(x) = W(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ is en A een reële niet-singuliere $s \times s$ - transformatiematrix, dan is de functie

$$C'(u') = C((u'A)_1, (u'A)_2, \ldots, (u'A)_s) = C(u) \tag{36}$$

beschouwd als functie van de nieuwe variabelen

$$u' = uA^{-1} \tag{37a}$$

eveneens een karakteristieke functie. De bijbehorende verdelingsfunctie $W'(x')$ hangt af van de variabelen:

$$x' = Ax \tag{37b}$$

Bewijs: $$C(u) = \int d^s x \; W(x)\, e^{iu.x}$$
$$= \int d^s x \; W(x)\, e^{iuA^{-1}.Ax}$$
$$= \int \frac{d^s x'}{|\det A|} \cdot W(A^{-1}x')\, e^{iu'.x'}$$
$$= \int d^s x' \; W'(x')\, e^{iu'.x'} = C'(u')$$

Dus C'(u') heeft de vorm van een karakteristieke functie van een verdelingsfunctie

$$W'(x') = \frac{W(A^{-1}x')}{|\det A|} \tag{38}$$

die aan de eisen (29) en (30) voldoet.

Wij passen deze eigenschap toe op de karakteristieke functie:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_s) = e^{P_n(u_1, u_2, \dots, u_s)} \tag{34}$$

Door de transformatie (36) gaat deze over in een nieuwe karakteristieke functie

$$C'(u_1', u_2', \dots, u_s') = e^{P_n'(u_1', u_2', \dots, u_s')} \tag{34'}$$

waarbij

$$P_n'(u_1', u_2', \dots, u_s') = P_n((u'A)_1, (u'A)_2, \dots, (u'A)_s) \tag{39}$$

Bij de transformatie geldt voor de som van de n-de graadstermen:

$$\sum_{\substack{\{m_k\} \\ \Sigma m_k = n}}' c_{\{m_k\}}\, u_1^{m_1} u_2^{m_2} \cdots u_s^{m_s} = \sum_{\{m_k\}}' c_{\{m_k\}} \Big(\sum_{l=1}^{s} u_l' a_{l1}\Big)^{m_1} \cdots \Big(\sum_{l=1}^{s} u_l' a_{ls}\Big)^{m_s} \tag{40}$$

Deze identiteit moet gelden voor willekeurige keuze van de variabelen $\{u_k\}$ of $\{u_k'\}$, dus bijvoorbeeld voor de keuze $u_j' = u'$ en $u_k' = 0$ voor $k \neq j$. Maar aangezien wegens (35) op dit geval de stelling van Marcinkiewicz voor één variabele van toepassing is, mogen in het rechterlid van (40) hoogstens termen van de tweede graad in u' voorkomen, m.a.w.:

$$\sum_{\{m_k\}}{}' c_{\{m_k\}} a_{j1}^{m_1} a_{j2}^{m_2} \dots a_{js}^{m_s} = 0 \qquad \text{voor} \qquad \sum_{k=1}^{s} m_k > 2 \tag{41}$$

Daar de j-de rij van de matrix A willekeurig, niet identiek nul, gekozen kan worden, moet het polynoom (41) in $a_{j1}, \dots, a_{js}$ identiek nul zijn, dus moeten alle coëfficiënten $c_{\{m_k\}}$ met $\sum_k m_k = n > 2$ nul zijn. Dus is $P_n(u)$ een polynoom van ten hoogste de tweede graad.

Wegens $C(0) = 0$ ontbreekt weer de constante term.

Uit $C^*(u) \equiv C(-u)$ volgt dat de lineaire term zuiver imaginair, en de kwadratische term zuiver reëel moet zijn.

Wegens $|C(u)| \leq 1$ volgt tenslotte dat de meest algemene vorm voor een dergelijke karakteristieke functie van meer variabelen is

$$C(u) = e^{iu.p - \frac{1}{2} uQ.u} \tag{42}$$

waarin $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_s \end{pmatrix}$ een willekeurige reële vector is, en Q een positief-semidefiniete reële $s \times s$-matrix, die we symmetrisch kunnen kiezen.

Door de oorsprong in de parameterruimte te laten samenvallen met de plaats van het gemiddelde kunnen wij de lineaire term laten verdwijnen. Door een hoofdassentransformatie voor de matrix Q toe te passen kunnen wij tenslotte de verdeling brengen in de vorm van een product van s onafhankelijke, ééndimensionale Gausz verdelingen.

§ 5. Waarschijnlijkheidsfunctionalen

In het vervolg zij $\mathcal{H}$ de Hilbertruimte van kwadratisch integreerbare functies. Stel wij hebben een randomveld $x(t) \in \mathcal{H}$ met waarschijnlijkheidsfunctionaal

$$W[x] \geq 0 \qquad (43)$$

met normering

$$\int_{\mathcal{H}} W[x]\, d[x] = 1 \qquad (44)$$

waarbij het symbool $\int_{\mathcal{H}} d[x]$ nu een functionele integraal voorstelt. We kunnen dan verwachtingswaarden van functionalen f[x] invoeren:

$$< f > = \int_{\mathcal{H}} f[x]\, W[x]\, d[x] \qquad (45)$$

en in het bijzonder de correlatiefuncties

$$\mu_0 \equiv < 1 > = 1 \qquad (46a)$$

$$\mu_m(t_1,\ldots,t_m) = < x(t_1)\cdots x(t_m) > = \int_{\mathcal{H}} x(t_1)\cdots x(t_m)\, W[x]\, d[x] \qquad (46b)$$

Definiëer vervolgens de karakteristieke functionaal met als argument $u(t) \in \mathcal{H}$:

$$C[u] = < \exp i \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, x(t)\, dt > \qquad (47)$$

Hiervoor gelden weer de eigenschappen uit § 2, dus bijvoorbeeld:

$$i^m < x(t_1)\cdots x(t_m) > = \left(\frac{\delta^m C[u]}{\delta u(t_1)\ldots\delta u(t_m)} \right)_{u \equiv 0} \qquad (48)$$

Als alle momenten bestaan en als C[u] in een functionele Taylorreeks kan worden ontwikkeld, geldt:

$$C[u] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m}{m!} \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_m(t_1,\ldots,t_m)\, u(t_1)\ldots u(t_m)\, dt_1\cdots dt_m \qquad (49)$$

De cumulantfuncties $K_m(t_1,\ldots,t_m)$ kunnen worden gedefiniëerd m.b.v. de volgende ontwikkeling, voorzover deze bestaat:

$$C[u] = \exp \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m}{m!} \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} K_m(t_1,\ldots,t_m)\, u(t_1)\ldots u(t_m)\, dt_1\cdots dt_m \qquad (50)$$

We beschouwen nu alleen gevallen waarbij alle cumulantfuncties kwadratisch integreerbaar zijn in al hun variabelen. We komen dan tot de volgende generalisatie van de stelling van Marcinkiewicz:

Als alle cumulantfuncties met meer dan n variabelen nulfuncties zijn, moet $n \leqslant 2$ zijn. Om dit in te zien ontwikkelen wij de functies $x(t)$ en $u(t)$ in een volledig orthonormaalstelsel van de kwadratisch integreerbare functies $\{ f_k(t) \}$:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \, f_k(t) \tag{51a}$$

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \, f_k(t) \tag{51b}$$

$$K_m(t_1, \dots, t_m) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=1}^{\infty} c_{k_1 \dots k_m} \, f_{k_1}(t_1) \cdots f_{k_m}(t_m) \tag{52}$$

Veronderstel nu dat alle

$$K_m(t_1, \dots, t_m) \equiv 0 \quad \text{voor} \quad m > n \tag{53}$$

en vullen we (51b), (52) en (53) in (50) in, dan vinden we:

$$C[u] = \exp \sum_{m=1}^{n} \frac{i^m}{m!} \sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=1}^{\infty} c_{k_1 \dots k_m} \, u_{k_1} \cdots u_{k_m} \tag{54}$$

We kunnen nu weer overgaan op een zogenaamde marginale verdeling, door een willekeurige selectie van n indices te kiezen en voor alle overige indices k in te vullen $u_k = 0$. De functionaal $C[u]$ gaat dan over in de karakteristieke functie in de n bijbehorende variabelen van een n-dimensionale verdeling. Wegens de vorige paragraaf moeten we dan concluderen $n \leqslant 2$. Het functionele polynoom $\log C[u]$ heeft dus alleen een lineaire en een bilineaire term.

Analoog aan de vorige paragrafen vinden wij nu weer dat

a) $K_1(t)$ een reële functie is

b) $K_2(t_1, t_2)$ een positief definiete integraalkern is.

Appendix. Alternatieve definitie voor een karakteristieke functie.

Wij beperken ons hier tot het één-dimensionale geval. Generalisatie is echter niet moeilijk.

De volgende voorwaarden zijn niet voldoende om te garanderen dat functie C(u) een karakteristieke functie is:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & |C(u)| \leqslant 1 \\ \text{b)} & C(u) \text{ overal continu} \\ \text{c)} & C(0) = 1 \\ \text{d)} & C(-u) = C^*(u) \end{array}\right\} \tag{55}$$

Voorwaarden a), b) en c) leveren de normering van W(x), terwijl d) de realiteit van W(x) impliceert. We eisen echter dat de verdelingsfunctie positief is. Een tegenvoorbeeld, zoals volgt uit de stelling van Marcinkiewicz is $C(u) = e^{-u^4}$. Een ander voorbeeld dat aan de voorwaarden a) t/m d) voldoet is $C(u) = \frac{1}{1+u^4}$. Dit is echter ook geen karakteristieke functie op grond van een andere stelling van Marcinkiewicz, die zegt:

Als een karakteristieke functie van de vorm

$$C(u) = 1 + \underset{u \to 0}{o}(u^2) \tag{56a}$$

is, m.a.w. als

$$\lim_{u \to 0} \frac{1 - C(u)}{u^2} = 0 \tag{56b}$$

dan moet gelden $\quad C(u) \equiv 1 \quad$ (57)

Want:

$$0 = \lim_{u \to 0} \frac{1 - C(u)}{u^2} = \lim_{u \to 0} \frac{1 - \int e^{iux} W(x)\, dx}{u^2}$$

$$= \lim_{u \to 0} \mathrm{Re}\, \frac{1 - \int e^{iux} W(x)\, dx}{u^2}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{1 - \int \cos ux\, W(x)\, dx}{u^2}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{\int W(x)dx - \int \cos ux\, W(x)dx}{u^2}$$

$$= \lim_{u\to 0} \int \frac{1-\cos ux}{u^2} W(x)\,dx$$

$$= \int \lim_{u\to 0} \frac{1-\cos ux}{u^2} W(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \int x^2 W(x)\,dx = 0$$

Dit betekent dat de gehele verdeling in de oorsprong geconcentreerd is, m.a.w. $W(x) = \delta(x)$ en $C(u) \equiv 1$, q.e.d.

Deze stelling geldt zelfs als $C(u) = 1 + \omega(u) + \underset{u\to 0}{o}(u^2)$ met $\omega(u) = \underset{u\to 0}{O}(u)$ een onevenfunctie van u, want het product van twee karakteristieke functies is de karakteristieke functie van de convolutie van de verdelingen, dus $C(u)C(-u) = 1 + \underset{u\to 0}{O}(u^3)$ is weer een karakteristieke functie.

We hebben gezien, dat behalve (55) nog een voorwaarde moet worden ingevoerd, om te garanderen dat de met $C(u)$ corresponderende verdelingsfunctie positief is. Hiertoe eisen we dat de functie $C(u)$ positief semidefiniet is, i.e.:

$$e) \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} C(u-v)\, f(u) f^*(v)\, du\, dv \geqslant 0 \qquad (58)$$

voor alle kwadratisch integreerbare functies f (of meer algemeen voor alle functies f waarvoor de integraal bestaat). Dat aan deze eigenschap voldaan is als $C(u)$ een karakteristieke functie is volgt direct uit de definitie:

$$C(u-v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(u-v)x} W(x)\,dx$$

dus

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} C(u-v)\, f(u) f^*(v)\, du\, dv =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{iux} du\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(v) e^{ivx} dv\right)^* W(x)\, dx \geqslant 0$$

waarbij de verwisselbaarheid van de integraties berust op de stelling van Fubini.

Het bewijs dat de verdelingsfunctie positief is, als (55) en (58) gelden, verloopt als volgt: Kies in (58) voor f(u) de functie:

$$f(u) = \begin{cases} e^{-iux-\lambda u} & , u \geqslant 0 \\ 0 & , u < 0 \end{cases} , \quad \lambda > 0 \quad \text{vast} \tag{59}$$

Dan geldt:

$$\int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} dv\; C(u-v)\, e^{-i(u-v)x - \lambda(u+v)} \geqslant 0$$

Hieruit volgt m.b.v. de transformatie $z = u - v$, $w = u + v$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{w \geqslant |z|} \frac{dw}{2}\; C(z)\, e^{-izx - \lambda w} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{2\lambda}\; C(z)\, e^{-izx - \lambda |z|} \geqslant 0$$

Dus $\displaystyle \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C(z)\, e^{-izx - \lambda |z|}\, dz \geqslant 0$

Daar de integrand continu is in λ en bovendien begrensd, mag men limietovergang $\lambda \rightarrow 0$ onder de integraal nemen, dus:

$$W(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C(u)\, e^{-iux}\, du \geqslant 0$$

(In het nette bewijs moet men er rekening mee houden, dat W(x) in het algemeen een gegeneraliseerde functie is.)

Men kan dus ook de volgende alternatieve definitie voor een karakteristieke functie geven:

Een functie C(u) is dan en slechts dan karakteristieke functie (d.w.z. van de vorm $\int e^{iux} W(x)dx$ met $\int W(x)dx = 1$, $W(x) \geqslant 0$) als:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & C(u) \text{ begrensd is} \\ 2) & C(0) = 1 \\ 3) & C(u) \text{ continu voor } u = 0 \\ 4) & C(u) \text{ positief semidefiniet .} \end{array}\right\} \quad (60)$$